2°) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

(On note f^{-1} la fonction réciproque de f et $(\mathscr{C}')$ la courbe représentative de f^{-1} dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$).

b) Tracer dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe $(\mathscr{C}')$.

c) Expliciter f^{-1},pour tout $x \in I$.

3°) a) Montrer que, pour tout $n \in IN^*$, l'équation $f(x)=n$ admet dans $[0,+\infty[$ une unique solution α_n.

b) Montrer que (α_n) est croissante.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$ et en déduire que (α_n) n'est pas majorée.

B) Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $F(x)=\int_0^x \ln\left(1+e^{-2t}\right)dt$.

(On ne cherchera pas à calculer $F(x)$).

1°) Pour $\lambda \in]0,+\infty[$. Interpréter graphiquement $F(\lambda)$.

2°) Etudier le sens de variation de F sur $[0, +\infty[$.

3°) Soit $a>0$.

a) Montrer que pour tout $t \in [1;1+a]$: $\dfrac{1}{1+a} \le \dfrac{1}{t} \le 1$.

b) Etablir que $\dfrac{a}{1+a} \le \ln(1+a) \le a$.

4°) Soit $x \in]0, +\infty[$.

a) Montrer que $\int_0^x \dfrac{e^{-2t}}{1+e^{2t}}dt \le F(x) \le \int_0^x e^{-2t}dt$.

b) En déduire que $\dfrac{1}{2}\ln(2)-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+e^{-2x}\right) \le F(x) \le \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}e^{-2x}$.

5°) Montrer que F admet une limite finie $\mathscr{L}$ en $+\infty$ et que $\dfrac{1}{2}\ln(2) \le \mathscr{L} \le \dfrac{1}{2}$.

6°) Donner une allure de C_F courbe représentative de F dans un autre repère.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn
Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn